Frege: fra estensionalismo e logicismo

Aldo Antonelli

aldo@uci.edu

Dip. di logica e filosofia della scienza

Università della California, Irvine

Firenze, 29 maggio 2003

(in collaborazione con Robert May, rmay@uci.edu)

I due programmi

Due programmi diversi si intersecano nel lavoro di Frege sui fondamenti dell'aritmetica:

- LOGICISMO: l'aritmetica è riducibile alla logica;
- ESTENSIONALISMO: l'aritmetica è riducibile a una teoria delle estensioni.

Sia nei *Fondamenti* che nei *Principi*, Frege articola l'idea che l'aritmetica sia riducibile a una teoria *logica* delle *estensioni*.

Ma i due programmi non possono essere perseguiti simultaneamente, a meno di contraddizione.

Logicismo e neo-logicismo

Il programma logicista è stato riproposto da Hale & Wright (*The Reason's Proper Study*, Oxford 2001).

Hale & Wright usano un operatore $^{\#}F$, che assegna a ogni concetto F un oggetto x, interpretato come «il numero degli F».

Tale operatore deve soddisfare il cosiddetto *Principio di Hume*: $^{\#}F = {}^{\#}G$ se e solo se c'è una corrispondenza biunivoca fra gli F e i G.

Nei *Grundgesetze*, Frege fa vedere che PH è derivabile in base al «Principio V», e quindi che l'aritmetica è a sua volta derivabile da PH.

I neologicisti rinunciano al «Principio V», adottano direttamente PH, e poi argomentano che PH è un principio logico.

Principi deboli di comprensione

Un'alternativa esplorata fra gli altri da R. Heck e K. Wehmeier è quella di mantenere il «Principio V», ma di indebolire il principio di comprensione ammettendo ad es. solo istanze predicative (aritmetiche) o anche Δ^1_1.

Il predicato di Russell è, caratteristicamente, Σ^1_1, e quindi non ricade sotto il principio di comprensione.

Questa strategia, coniugata con una forma schematica del «Principio V», applicata solo a predicati e non a formule, a tutti gli effetti limita il numero di concetti aventi un decorso di valori, ma ancora persegue una forma del programma logicista.

Questa strategia non permette di derivare l'aritmetica di Peano, ma solo (apparentemente) quella più debole di Robinson.

Una teoria estensionalista

Il presente progetto vuole invece abbandonare completamente il logicismo, e dare una teoria genuinamente estensionalista in cui si possa ricostruire l'Aritmetica di Peano.

In una teoria estensionalista, l'esistenza dell'estensione di un predicato non è una questione logica, ma dipende da specifiche assunzioni extra-logiche.

Tale teoria deve trovare un equilibrio fra le istanze della non-contradditorietà (che preclude che tutti i predicati abbiano decorsi di valori) e il requisito delle derivabilità dell'aritmetica (che richiede che almeno alcuni predicati abbiano un'estensione).

Possibile obiezione: non è la teoria degli insiemi, ad es. ZFC, già una realizzazione completa del programma estensionalista?

Ma ZFC non è una teoria delle estensioni *dei concetti.* I concetti sono spariti, e sono rimaste solo le estensioni.

I numeri: oggetti o concetti?

Una caratteristica comune sia alle teorie (neo)-logiciste che ai principi deboli di comprensione è la nozione che i numeri sono *oggetti*.

I neo-logicisti identificano i numeri con i valori dell'operatore $^{\#}F$, e tali valori appartengono al dominio degli oggetti del primo ordine.

I sostenitori dei principi deboli di comprensione seguono l'idea originale di Frege: un numero è l'estensione (al primo ordine) di un concetto del terzo ordine, cioè il concetto $\mathfrak{N}_F(G)$ sotto cui ricadono tutti e soli i concetti G equinumerosi a F (l'estensione di $\mathfrak{N}_F$ è interpretata come ≪il numero degli F≫).

In realtà tale identificazione *non è necessaria* per la derivabilità dell'aritmetica. Come lo stesso Frege dice a volte, è una mera convenienza.

Il numero degli F può essere identificato direttamente con il concetto $\mathfrak{N}_F$ (o simile), purché si mantenga un'iniezione (parziale) dei concetti negli oggetti.

Il linguaggio $\mathcal{L}_2$

Usiamo un linguaggio al secondo ordine $\mathcal{L}_2$ avente:

- variabili e costanti individuali
- variabili e costanti predicative
- connettivi e quantificatori
- una costante relazionale $\mathsf{VR}(P, x)$ (x è il decorso di valori di P).

Un modello $\mathfrak{M}$ per $\mathcal{L}_2$ contiene un dominio non vuoto di oggetti D e, per ciascun n, una collezione non vuota di sottoinsiemi di D^n (soddisfacente certe condizioni di chiusura). Variabili e costanti predicative n-arie prendono valori in tale collezione.

Infine, corrispondente a VR abbiamo una funzione che assegna un sottoinsieme di D di cardinalità ≤ 1 a ciascuna variabile predicativa P.

Numeri

Nella logica del secondo ordine è possibile esprimere in modo standard l'esistenza di una corrispondenza biunivoca fra i P e i Q. Tale espressione è abbreviata $P \approx Q$.

Si definisca $\mathsf{N}(P, Q)$, ≪Q è il numero dei P≫, se e solo se Q è il concetto <y è il decorso di valori di un $S \approx P$>:

$$\forall y(Qy \leftrightarrow \exists S(\mathsf{VR}(S, y) \wedge P \approx S)).$$

Usiamo variabili del secondo ordine $N, M, P, \ldots$ per i numeri, e abbreviamo ≪N è un numero≫: $\exists PN(P, N)$, come $\mathsf{N}(N)$.

Si scrive anche $\mathsf{Z}(N)$, ≪N è zero≫, se e solo se $\exists P(\forall y \neg P(y) \wedge \mathsf{N}(P, N))$.

Definiamo $\mathsf{Sc}(M, N)$, ≪N è il successore (immediato) di M≫, come segue:

$$\exists P \exists Q \exists z[\mathsf{N}(P, M) \wedge \mathsf{N}(Q, N) \wedge Qz \wedge \forall w(Pw \leftrightarrow Qw \wedge w \neq y)].$$

Testimoni

Diciamo che x è un *testimone* per il numero N, abbreviato $\mathsf{Wtn}(N, x)$, se e solo se $\exists P(\mathsf{N}(P, n) \wedge \mathsf{VR}(P, x)$.

La definizione di *numero naturale* segue la definizione standard induttiva di ordine superiore: N è un numero naturale se e solo se ogni predicato S contenente un testimone per zero, e tale che se contiene un testimone per M allora contiene anche testimoni per i successori di M, contiene anche un testimone per N:

$\mathsf{Nn}(N)$, «N è un numero naturale», sse:

$$\begin{aligned}\forall S[\exists y(\mathsf{Wtn}(\mathsf{Z}, y) \wedge Sy) \wedge \forall M(\mathsf{N}(M) \wedge \exists y(\mathsf{Wtn}(M, y) \wedge Sy)\\ \to \forall M'(\mathsf{Sc}(M, M') \to \exists y(\mathsf{Wtn}(M', y) \wedge Sy)))\\ \to \exists y(\mathsf{Wtn}(N, y) \wedge Sy)]\end{aligned}$$

La teoria $\mathcal{F}$

$\mathcal{F}$ ha i seguenti *assiomi extra-logici*:

1. Una versione del «Principio V» di Frege (dove $\overline{z} = z_1, \ldots z_n$):

$$\forall P \forall Q \forall x \forall y [\mathsf{VR}(P, x) \wedge \mathsf{VR}(Q, y) \rightarrow (\forall \overline{z}(P\overline{z} \leftrightarrow Q\overline{z}) \leftrightarrow x = y)];$$

2. Un principio di comprensione per ciascuna formula ϕ (con parametri oltre a P): $\exists P \forall \overline{x}[P\overline{x} \leftrightarrow \phi(\overline{z})]$;

3. assiomi esistenziali speciali che garantiscono l'esistenza dei decorsi di valori di insiemi di testimoni: per ciascuna formula ϕ,

$$\forall x(\phi(x) \rightarrow \exists M(\mathsf{Nn}(M) \wedge \mathsf{Wtn}(M, x))) \rightarrow \exists x\, \mathsf{VR}(\phi, x).$$

Ne segue in particolare (da (1)) che i concetti hanno al più un decorso di valori:

$$\forall P \forall x \forall y [\mathsf{VR}(P, x) \wedge \mathsf{VR}(P, y) \rightarrow x = y].$$

Induzione

Usiamo la costante predicativa Z per denotare l'unico Q tale che $\mathsf{Z}(Q)$.

Il seguente principio di induzione è valido, per ciascuna formula $\Phi(P)$:

$$\Phi(\mathsf{Z}) \land \forall N(\mathsf{Nn}(N) \land \Phi(N) \to$$
$$\forall M(\mathsf{Sc}(N, M) \to \Phi(M))) \to \forall N(\mathsf{Nn}(N) \to \Phi(N)).$$

$M \leq N$ vale se e solo se ogni insieme che contiene un testimone per M e contiene testimoni per successori, contiene anche un testimone per N.

Assiomi di Dedekind-Peano

In analogia con G. Boolos, consideriamo la seguente assiomatizzazione per l'aritmetica:

1. $\exists N(\mathsf{Z}(N) \wedge \mathsf{Nn}(N))$;
2. $\forall N \forall M(\mathsf{Nn}(N) \wedge \mathsf{Sc}(N, M) \rightarrow \mathsf{Nn}(M))$;
3. $\forall M \forall N_1 \forall N_2(\mathsf{Nn}(M) \wedge \mathsf{Sc}(M, N_1) \wedge \mathsf{Sc}(M, N_2) \rightarrow M = N)$;
4. $\forall N(\mathsf{Nn}(N) \rightarrow \exists M(\mathsf{Sc}(N, M) \wedge N \neq M))$;
5. $\forall N \forall M(\mathsf{Nn}(N) \wedge \mathsf{Z}(M) \rightarrow \neg \mathsf{Sc}(N, M))$;
6. $\forall M \forall N_1 \forall N_2(\mathsf{Nn}(N_1) \wedge \mathsf{Nn}(N_2) \wedge \mathsf{Sc}(N_1, M) \wedge \mathsf{Sc}(N_2, M) \rightarrow N_1 = N_2)$;
7. per ciascuna formula $\Phi(X)$ avente la variabile al secondo ordine X libera:

$$\Phi(\mathsf{Z}) \wedge \forall M(\mathsf{Nn}(M) \wedge \Phi(M) \rightarrow \forall M'(\mathsf{Sc}(M, M') \rightarrow \Phi(M'))) \rightarrow$$
$$\forall M(\mathsf{Nn}(M) \rightarrow \Phi(M')).$$

Testimoni speciali

Il predicato vuoto è un predicato di testimoni, che quindi ha un decorso di valori, $\mathbf{z}$, tale che $\mathsf{Wtn}(\mathsf{Z}, \mathbf{z})$.

Definiamo $\mathbf{N}$ come il minimo predicato P contenente $\mathbf{z}$ e soddisfacente alle condizioni di chiusura:

$$\forall Q \forall x \forall S \forall y [Px \wedge \mathsf{VR}(Q, x) \wedge \forall z (Sz \leftrightarrow (Qz \vee z = x)) \wedge \mathsf{VR}(S, y) \rightarrow Py].$$

Cioè: $\mathbf{N} = \{n_0 \prec n_1 \prec \ldots\}$, dove n_k è l'estensione del predicato comprendente $\mathbf{z} = n_0, \ldots, n_{k-1}$; n_k è un *testimone speciale* per il numero K.

$$\begin{aligned} n_0 &= \mathsf{VR}(\lambda y \bullet y \neq y) = \mathbf{z} \\ n_1 &= \mathsf{VR}(\lambda y \bullet y \neq y \vee y = n_0) = \mathsf{VR}(\lambda y . y = n_0) \\ &\vdots \\ n_{k+1} &= \mathsf{VR}(\lambda y \bullet y = n_0 \vee \ldots \vee y = n_k) \end{aligned}$$

Assioma dell'infinito

TEOREMA: Se $\mathbf{N}x$, allora $\forall y(\mathbf{N}y \wedge y \prec x \rightarrow y \neq x)$.

Dimostrazione informale. Ovviamente, $n_0 \neq n_1$. Supponiamo per assurdo che $n_j = n_k$, per $0 < j < k$. Allora:

$$\mathsf{VR}(\lambda y \centerdot y = n_0 \vee \ldots \vee y = n_{j-1}) = \mathsf{VR}(\lambda y \centerdot y = n_0 \vee \ldots \vee y = n_{k-1});$$

Usando il «Principio V»,

$$\forall y(y = n_0 \vee \ldots \vee y = n_{j-1} \leftrightarrow y = n_0 \vee \ldots \vee y = n_{k-1});$$

In particolare, usando solo logica del prim'ordine

$$\forall y(y = n_{k-1} \rightarrow y = n_0 \vee \ldots \vee y = n_{j-1}),$$

cioè, $n_{k-1} = n_0 \vee \ldots \vee n_{k-1} = n_j$, contro l'ipotesi di induzione.

COROLLARIO: $\mathsf{Nn}(M) \wedge \mathsf{Sc}(M, N) \rightarrow M \neq N$

La coerenza di $\mathcal{F}$

È possibile esibire un modello per $\mathcal{F}$ usando la seguente costruzione di Øystein Lynnebo.

Osserviamo che ogni testimone di un numero naturale M è il decorso di valori di un concetto finito. È sufficiente quindi esibire un modello in cui ogni insieme di decorsi di valori di concetti finiti ha a sua volta un decorso di valori.

È facile far vedere che $V_{\omega+1}$, la collezione degli insiemi di insiemi ereditariamente finiti, è il modello desiderato.

In modo simile è possibile esibire modelli di cardinalità 2^κ in cui ogni insieme di cardinalità κ ha un decorso di valori. Tale modello ha al più $(2^\kappa)^\kappa = 2^\kappa$ sottoinsiemi di cardinalità κ, e si può usare l'assioma della scelta per iniettare tali sottoinsiemi sugli oggetti del modello.

Il sistema $\mathcal{F}_0$

$\mathcal{F}_0$ è un sistema più debole, ma sufficiente a derivare l'aritmetica di Peano.

Sia $\mathsf{Fin}(N)$ l'asserzione al secondo ordine che l'estensione di N è Dedekind-finita.

- Il sistema $\mathcal{F}_0$ è ottenuto da $\mathcal{F}$ indebolendo il terzo assioma:

$$\mathsf{Fin}(\phi) \wedge \forall x(\phi(x) \rightarrow \exists M(\mathsf{Nn}(M) \wedge \mathsf{Wtn}(M, x))) \rightarrow \exists x\, \mathsf{VR}(\phi, x).$$

- $\mathcal{F}_0$ è equi-consistente con l'aritmetica del primo ordine, rappresentando ogni insieme finito di numeri naturali per mezzo di un codice $\in \mathbb{N}$, che ne fornisce anche il decorso di valori.

Il principio di Hume

PH asserisce che il numero degli F è uguale al numero dei G se e solo se c'è una corrispondenza biunivoca fra gli F e i G. Secondo Hale e Wright PH è, se non una verità logica, analitico del concetto di numero.

Due possibili formalizzazioni in $\mathcal{L}_2$:

- $\exists M(\mathsf{N}(F, M) \wedge \mathsf{N}(G, M)) \leftrightarrow F \approx G$; or
- $\forall M(\mathsf{N}(F, M) \leftrightarrow \mathsf{N}(G, M)) \leftrightarrow F \approx G$.

Lo status di PH in $\mathcal{F}$ risulta indipendente dalla formulazione scelta.

L'implicazione inversa (sin. a des.) vale in $\mathcal{F}$, e dipende solo dal principio di comprensione. Se $F \approx G$, e M è il numero degli F, allora per ipotesi M è anche il numero dei G.

Controesempio al principio di Hume

È possibile mostrare che l'implicazione diretta in PH non vale in $\mathcal{F}_0$.

Sia A un insieme più che numerabile di *Urelemente*, e sia $V_\omega[A]$ la collezione degli insieme ereditariamente finiti su A.

Il contromodello cercato usa $V_\omega[A]$ come dominio al prim'ordine, e usa una codifica standard degli insiemi finiti di numeri naturali come assegnamento di decorsi di valori.

Poiché solo gli insiemi finiti di numeri naturali hanno decorsi di valori, nessun $S \approx A$ ha un decorso di valori; e per motivi simili no $S \approx \mathbb{N}$ ha un decorso di valori.

Ora, se M è il numero degli A e N è il numero di $\mathbb{N}$, si ha $M = \emptyset = N$, eppure $A \not\approx \mathbb{N}$.

[Un simile controesempio si può ottenere in $\mathcal{F}$.]

Il sistema $\mathcal{F}^+$

Concludiamo presentando il sistema $\mathcal{F}^+$, ottenuto da $\mathcal{F}$ modificando l'assioma esistenziale:

Ogni insieme di testimoni di numeri cardinali ha un decorso di valori

Questo sistema non è ancora stato studiato, e persino il problema della coerenza è aperto.

Bibliografia essenziale

1. Aldo Antonelli and Robert May, *Frege's New Science*, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 41(3):242–70, 2000 (pubblicato 2002).
2. Aldo Antonelli and Robert May, *Frege's* Other *Program.*
3. George Boolos, *On the proof of Frege's theorem*, in Adam Morton and Stephen Stitch, a cura di, *Benacerraf and his Critics*, pagg. 143–59, Blackwell, 1996.
4. George Boolos, *Is Hume's principle analytic?*, in Richard Heck, a cura di, *Language, Thought and Logic: Essays in honour of Michael Dummett*, Oxford University Press, 1997.
5. George Boolos, *Logic, Logic, and Logic*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1998.
6. George Boolos e Richard Heck, *Die Grundlagen der Arithmetik,* §§*82-3*, in Matthias Schirn, a cura di, *The philosophy of mathematics today*, pagg. 407–28, Oxford University Press, 1998.
7. Fernando Ferreira e Kai F. Wehmeier, *On the consistency of the* Δ^1_1*-CA fragment of Frege's* Grundgesetze, *Journal of Philosophical Logic*, 31:301–11, 2002.
8. Bob Hale e Crispin Wright, *The Reason's Proper Study. Essays toward a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics*, Oxford-Clarendon Press, 2001.
9. Richard Heck, *The consistency of predicative fragments of Frege's* Grundgesetze der Artithmetik, *History and Philosophy of Logic*, 17:209–20, 1996.
10. Kai F. Wehmeier, *Consistent fragments of* Grundgesetze *and the existence of non-logical objects*, *Synthése*, 121:309–28, 1999.